**有界度图中最大独立集的逼近**

Piotr Berman Martin Fürer

**摘要：**对于所有且的情况，我们提出了一个最大独立集问题的多项式时间近似算法，其中是图的度数，它在为偶数时比率为，奇数时比率为。

**1 前言**

众所周知，不同的NP-完全组合优化问题在其近似性方面表现非常不同[GJ]。在本文中，我们只对多项式时间算法所能达到的近似比感兴趣。因此，我们指的近似就是用多项式时间算法进行近似。

从这个角度对问题进行分类的最成功的尝试是Papadimitriou和Yannakakis介绍的 SNP类[PY]。每个SNP问题都可以用一个正常数性能比来近似。在这篇论文中，我们使用反向性能比（i.p.r.），一个最大化问题近似质量的自然测量标准。近似算法的i.p.r.是近似解和最优解的大小之间的最坏情况(即最小值)比率。对于 SNP 类，许多 NP 完全问题的有界版本在保持近似可约性方面是完备的。在这些例子中，可以提到MAX kSAT(子集大小以k为界的最大SAT问题)，度为Δ的图中的最小支配集（minimum dominating set），MIS-Δ（度为Δ的图中的最大独立集）。

**2 算法的描述**

在我们描述算法前，我们有如下必须的定义。

定义2.1 以下，是一个无向图或多重图，而A，B，I时点的集合。

1. 由诱导生成的子图是，其中是属于E的A中顶点之间的边的集合。
2. 如果，那么是一个独立集。的MIS，一个最大独立集，是V中有最大大小的独立集。
3. 是的改进，如果和均是独立集，是连通的且比更大（操作符表示对称差）。
4. ，若的度为3，则等于，并且是有着至少与有两个邻居的点集。

我们近似最大独立集的方法相当简单: 我们从任何独立候选集开始，然后使用两种可能的方法尝试增加它的大小。首先，我们检查一个“小”改进是否存在。如果是，我们使用替换并再次尝试。如果没有改进存在，我们对使用一个近似算法来寻找一个独立集；如果比更大，我们就用替换。如果这也没有成功，我们终止并返回，否则我们将再次寻找小改进。

关于这种方法，人们可能会问的第一个问题是: “小”能有多大，以至于算法仍然在一个多项式时间内运行。换句话说，什么样的大小界限，我们可以容忍，包含最多个节点的所有可能的改进为多项式。第二个问题是: 必须有多大，才能使算法达到所承诺的近似比。

第一个问题很好回答。假设每个节点的邻居以任一方式排列。然后每个连通子图可以用它的任意一个深度优先遍历来表示，这个遍历可以用一个起始点和一系列相邻点的选择来描述。在树中返回的常用决策可以用一位进行编码。该方法表明含有最多个点的个数小于，其中是的大小，是的度。假如我们考虑是常数的情况，那么是的。

第二个问题的答案是下面两个部分的主题。然而，在我们试图解决这个问题之前，我们应更准确地提出这个问题。对每个且，我们会表明对一个度为且MIS大小为，存在多项式时间算法，能够在图中找到一个大小为的独立集，如此，其中。

算法有着以下的描述形式，包括两个定义。“小”改进意味着一个改进有着最多个点定义保安和你，其中常量的大小在第4部分中提到。第二个定义关注算法用来在Comp(A)（为找到B的一个可能的A的替代）中近似MIS。如果，那么的度最大为，且我们会用来寻找B。如果为3或4，那么是一个度最大为2的图，因此我们可以在线性时间内计算是否是的一个MIS。

算法2.1. :

If then

计算MIS的确定值并终止

令为任一最大独立集

Repeat

寻找所有可能的大小为cΔ,k的改进

If then else

在Comp(A)上递归应用

and 选择独立集结果

set 如果它更大

Until 没有更多改进被找到

**3 对算法分析的预备**

本节包含图理的事实和定义，将用于分析算法。由于多个边和环不会影响独立集，我们通常不允许它们。然而，对于一些用于算法分析的辅助构造，我们使用带环和多边的多重图。在所有引理中，我们假设是一个有个节点的图或多重图。此外，表示2底的对数，表示集合的基数。

定义 3.1 套索是由一组节点诱导的连通子图，使得。双目镜是的套索。

请注意，一个典型的套索，形成一个环链连接到它，而两个环链连接到一个链或两个环生长在一起形成一个双目镜。

引理 3.1 假设多重图中的每个顶点的度至少为3.那么每个顶点均属于一个有着最多个顶点的双目镜。

证明。考虑一个以为根的的广度优先搜索树。如果距离小于的树中的每个节点至少有两个子节点,那么这棵树至少有个节点。因此必然存在一个节点距离的距离最多是，有着最多一个子节点。因为上至少有3条边，其中一条是交叉边、环或多重边。假设这条边连接者和。那么到和到的树路径与边连接起来，形成了一个有最多个节点的套索。如果还没有定义一个双目镜，我们可以收缩为单个节点，所有在更改后的图中的节点仍然有着最少为3的度。因此，在更改后的图我们可以找到一个有着最多个节点的套索。是一个有着最多个节点的双目镜。

引理 3.2 假设在多重图中满足。那么包含一个少于个节点的双目镜。

证明。令为的最小诱导子图，满足。那么不会包含任何度为1的节点。很容易发现中任何拥有2度节点的最大链有着少于个元素。将每个链替换为一个连接着其终点的单边。生成的图满足引理3.1；因此它包含一个有着个节点的双目镜。选择包含在中的条边，并用2度节点的相应链替换那些链。生成的图是有着最多个节点的中的双目镜。

上述引理使我们能够为一个候选独立集的改进的存在性提供充分条件。首先，我们需要一个额外的定义。下面，，是中两个不相交的独立集。

定义3.2 令为中与有恰好1个邻居的元素，是中与有1个邻居的元素，是中与有恰好2个邻居的元素，是连接着和的边，和有着共同邻居，中的。在这个例子中我们说是边的象征。

引理3.3 如果是一个独立集且，那么有着一个大小小于的包含于的改进。

证明。令。多重图中边集数量的大小至少为。根据引理3.2，多重图包含一个双目镜，它有着连接着条边的个节点。中的节点与这些边的象征的并集形成了最大为的的改进。

引理 3.4 令和为独立集。令。假设存在一个包含于的大小为的改进。那么有着一个包含于的大小最大为的改进。

证明。

**4 算法分析**

我们首先描述为偶数情况的分析。其余情况是类似的。我们固定为。假设是我们算法的结果，是一个MIS。令。按引理3.4定义和，并让。最后，用相应的小写字母来表示这些集合的基数。

注意到中的一个改进是。这是因为 和之间没有边。因为是算法的返回值，它没有大小为的改进。从引理3.5中我们得到不等式

(1)

注意到是包含于中的独立集。因为我们将应用在上且没有找到比更大的独立集，我们得到不等式

(2)

注意到且。如同我们之前讨论的，没有比 更多的元素。另外，中一些两个节点在中有着仅仅一个共同的邻居，这会产生一个大小为3的的改进，即。由此

(3)

将个(1)，个(2)，1个(3)相加，我们得到

(4)

若是奇数且大于3，我们只需将不等式(2)替换为

(5)

我们仍然将个(1)，个(2)，1个(3)相加，得到

(6)

最终，如果，不等式(2)被替换为

(7)

再次以相同权重应用到这些不等式上，我们得到

(8)

**4 算法分析**

明显的，我们的终极目标是在i.p.r.上达到这个SNP完全问题的上限和下限。

**参考文献**